14. くもの巣サイクルと合理的予想

ワルラス的調整

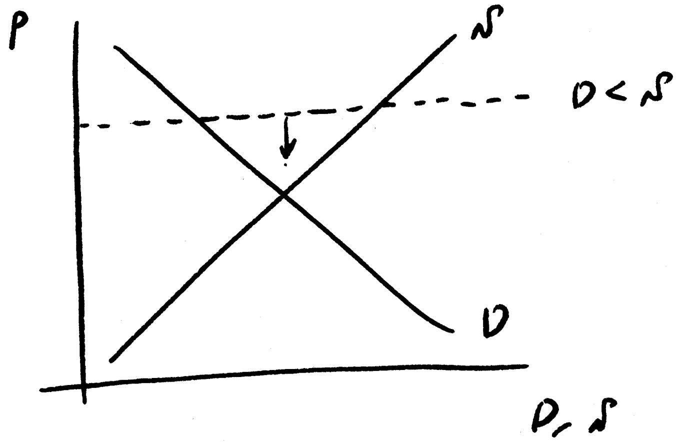
① せり人（競売人，オークショニアー）が価格を提示。

② 買い手と売り手が、その価格を見て、それぞれ
　需要量と供給量を申告。

③ せり人は、
　$D < S$ なら 価格を下げる。
　$D > S$ なら 〃 上げる。

④ ②-③をくり返す。

⑤ $D = S$ となったら取引きを行う。

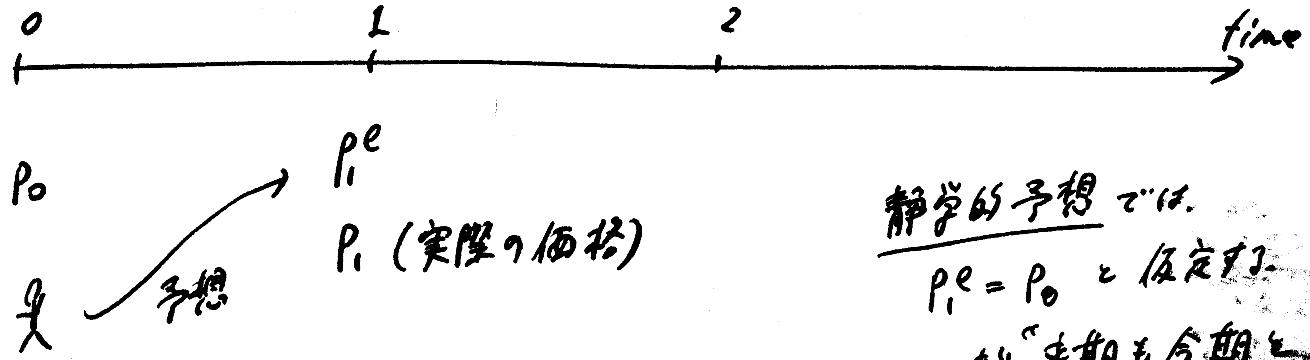


※ 仮想的な話だが、このプロセスでは
　時間は流れていない。

※ このプロセスは 模索（もさく）過程（タトヌマン・プロセス）
　と呼ばれる。

ワルラス的調整過程を修正する。

- 生産に時間がかかる（一期間）
- 供給者は、一期先の生産終了時点（販売する時点）での価格を予想して今期に供給量決定の意思決定を行う。さしあたり、農産物を念頭におく。



静学的予想では、
$p_1^e = p_0$ と仮定する。
つまり、"来期も今期と同じ価格が続くだろう"。

生産計画 → 生産完成

（p_1^e を基に計画を立てる。）（この供給量と需要量が一致するように p_1 が決まる。）

数式による表現

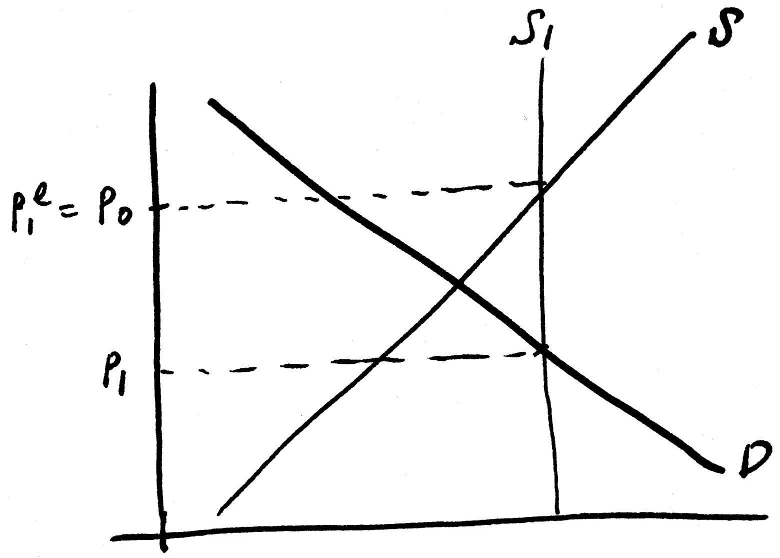
$$D_t = D(p_t)$$

$$S_t = S(p_t^e)$$

$$D_t = S_t$$

$$p_t^e = p_{t-1} \quad \text{（静学的予想）}$$

図による説明



・需要・供給曲線は、時間を通じて変化しない。

・S_1：第1期の供給曲線（垂直）

第0期に計画された供給量

（$P_0 = P_1^e$ に基づいて）

生産物は次の期（第2期）まで持ちこすことは

できないので、価格　に関係なく

売りきらなくてはならない。

よって S_1 は垂直

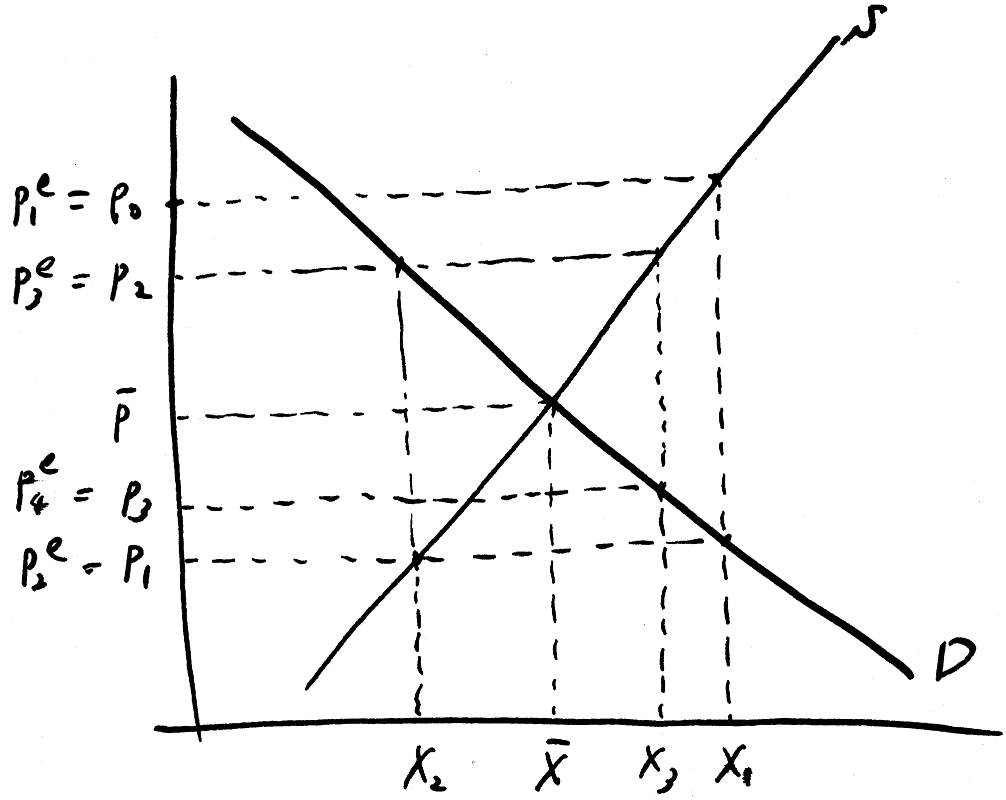
・S_1 と D が交わる水準で第1期の価格 P_1 は決まる。

需給量は S_1 の水準

・供給者は $P_1 = P_2^e$ として第2期の生産量を決定する。

⋮

価格・数量の動学（時間を通じた変化）



$\{P_1, P_2, P_3, \cdots\}$ 時間を通じて動いていく。

$\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$ これらは数列。

- $D = S$ となる価格の水準 $\bar{P}$
  数量 $\bar{X}$

一旦経済が $(\bar{X}, \bar{P})$ に達すれば、

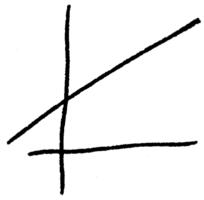
価格も数量も、そこから動かない。

$(\bar{X}, \bar{P})$ はある種の不動点。

数値例（線型モデル）

$$\begin{cases} S_t = a P_t + b & \text{—①} \\ D_t = c P_t + d & \text{—②} \\ D_t = S_t & \text{—③} \\ P_t^e = P_{t-1} & \text{—④} \end{cases}$$

← これらが1次式で表されるので"線型モデル"という。



1次式のグラフは、まっすぐ！
つまり線の型。
かた

ただし
$a > 0$
b：0に近い
$c < 0$
$d > 0$：十分大きい

①、②、④を③へ代入して

$$c P_t + d = a P_{t-1} + b$$

$$\therefore P_t = \frac{a}{c} P_{t-1} + \frac{b-d}{c} \quad \text{—(※)} \quad \text{一階の漸化式}$$

ここで $P_t = P_{t-1} = \bar{P}$ とおくと、(※)は以下のように書き換えられる。

$$P_t - \bar{P} = \frac{a}{c}\left(P_{t-1} - \bar{P}\right) \quad \text{← 次ページ参照.}$$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c}\left(P_{t-2} - \bar{P}\right)$$

$$= \cdots$$

$$= \left(\frac{a}{c}\right)^t \left(P_0 - \bar{P}\right) \quad \text{—(☆)}$$

一方で(※)より $\bar{P}$ を求めると、

$$\bar{P} = \frac{b-d}{c-a}$$

よって(☆)より

$$P_t = \left(\frac{a}{c}\right)^t \left(P_0 - \bar{P}\right) + \bar{P}$$

$$\therefore P_t = \left(\frac{a}{c}\right)^t \left(P_0 - \frac{b-d}{c-a}\right) + \frac{b-d}{c-a}$$

と P_t を求めることができる。

$$\begin{cases} x_t = \alpha x_{t-1} + \beta \quad (\alpha \neq 1) & \text{—(*)} \\ x_t = x_{t-1} = \overline{x} \end{cases}$$ とすると

$$(*) \iff x_t - \overline{x} = \alpha (x_{t-1} - \overline{x}) \quad \text{—(**)}$$

である。

証明

(*)に $x_t = x_{t-1} = \overline{x}$ を代入すると

$$(1-\alpha)\overline{x} = \beta$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (\because \alpha \neq 1)$$

これを(**)に代入すると

$$(**) \iff x_t - \frac{\beta}{1-\alpha} = \alpha\left(x_{t-1} - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$

$$\iff x_t = \alpha x_{t-1} - \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\iff x_t = \alpha x_{t-1} - \frac{\beta(\alpha-1)}{1-\alpha}$$

$$\iff x_t = \alpha x_{t-1} + \beta \iff (*)$$

//

$$p_t = \left(\frac{a}{c}\right)^t (p_0 - \bar{p}) + \bar{p}$$ の考察.

$c < 0$, $a > 0$ ← 経済モデルなのでこう考えるのが妥当.

(i) $\left|\frac{a}{c}\right| < 1$ ならば

p_0 がどのような値であれ.

$p_t \longrightarrow \bar{p}$ （p_t は $\bar{p}$ に収束する。）

しかも $\frac{a}{c} < 0$ なので 振動しながら収束する.

例. $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^t \cdot 10\right\}$

$$= \left\{-\frac{10}{2}, \frac{10}{4}, -\frac{10}{8}, \frac{10}{16}, \cdots\right\}$$

(t=1) (t=2) (t=3) (t=4)

(ii) $\left|\frac{a}{c}\right| > 1$ ならば. p_0 がどのような値であれ.

$\{p_t\}$ は. 発散。

しかも $\frac{a}{c} < 0$ なので 振動しながら発散する。

例. $\{(-2)^t \cdot 10\}$

$$= \{-20, 40, -80, \cdots\}$$

(iii) $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$ （つまり $c = -a$）ならば

$p_t = (-1)^t (p_0 - \bar{p}) + \bar{p}$ となり

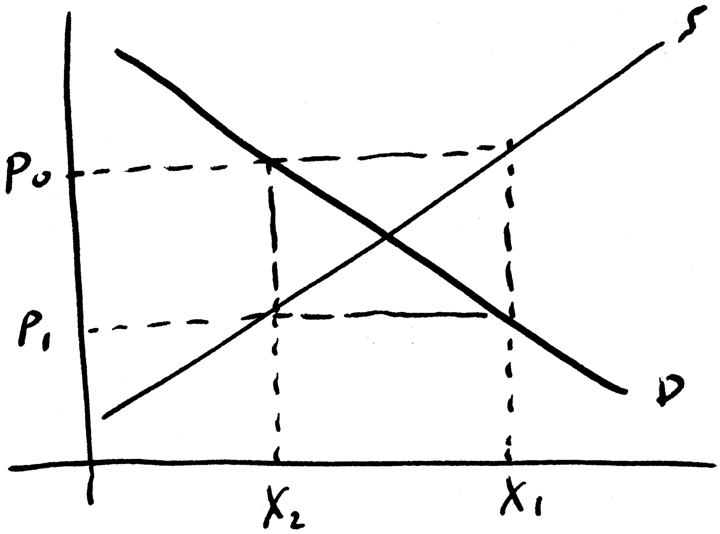
$p_0 \neq \bar{p}$ である限り $\{p_t\}$ は $\bar{p}$ のまわりを永遠に循環する。しかも2周期。

例 $\{(-1)^t \cdot 10\}$

$= \{-10, 10, -10, 10, -10, 10, \cdots\}$

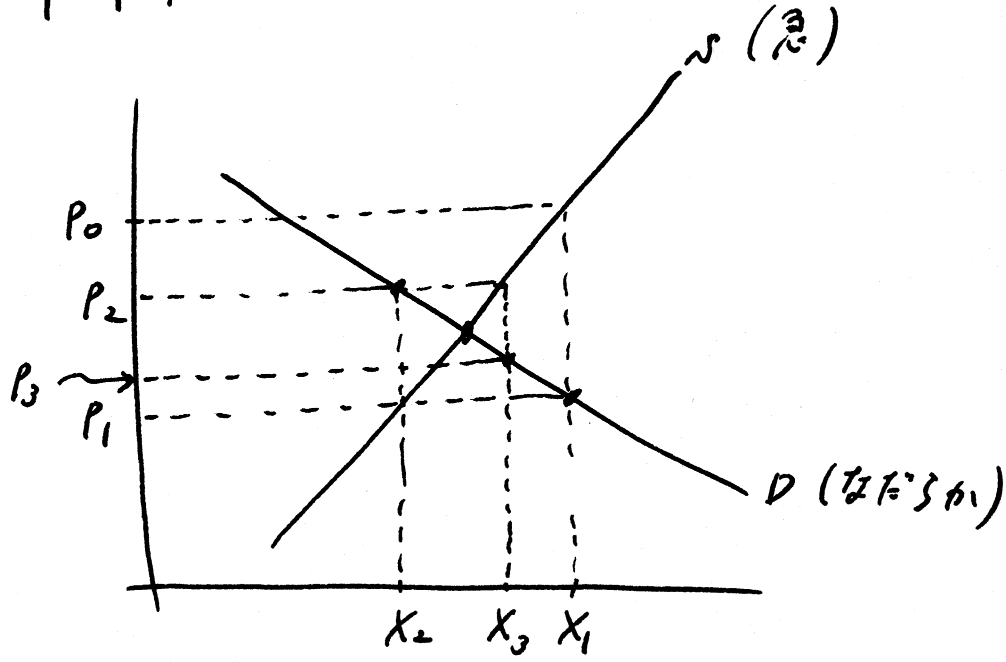
※価格の動学 $\{p_t\}$ が決まれば数量の動学も
（時間を通じた動き）

①と③ $\underset{S_t}{\overset{\shortparallel}{D_t}} = c p_t + d$ より決まる。

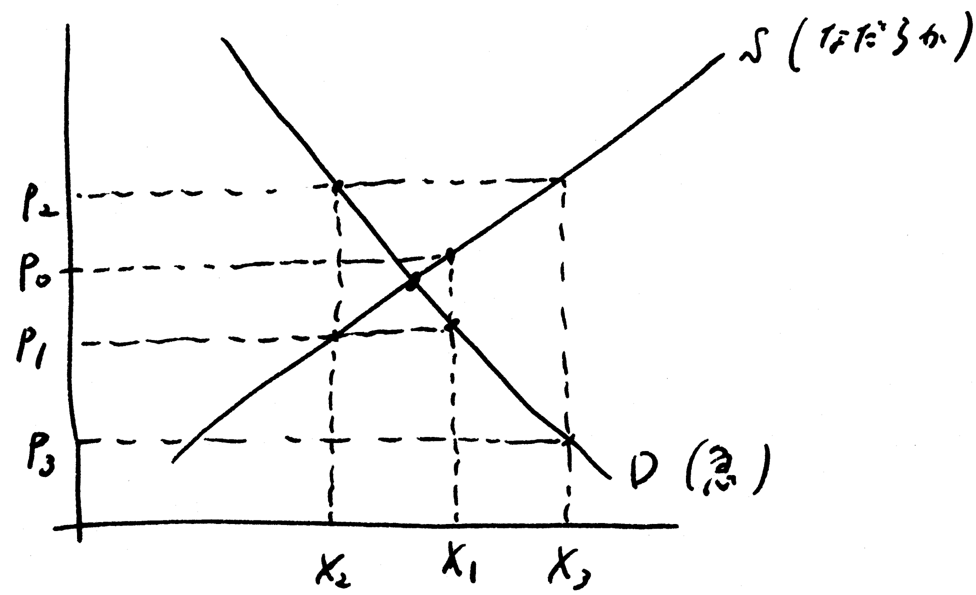


図解

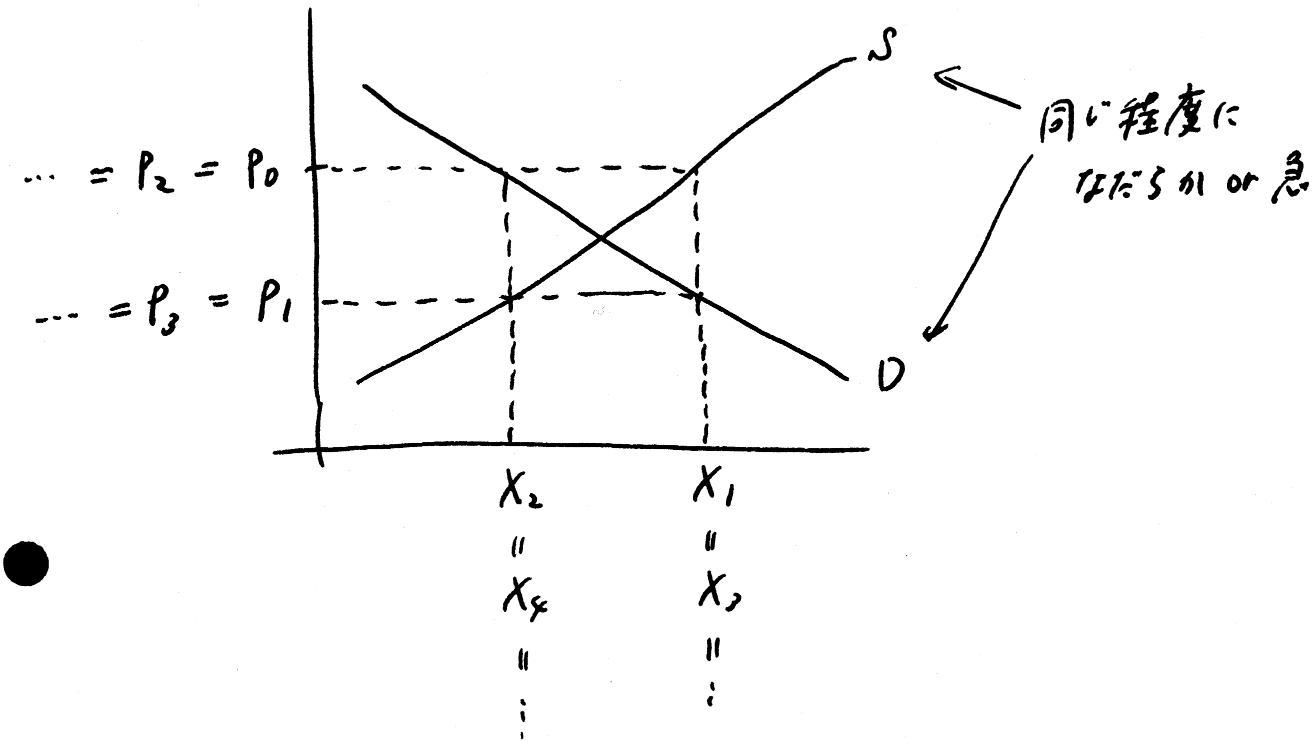
(i) $|a| < |c|$



(ii) $|c| < |a|$



(iii) $|a| = |c|$



例

$$\begin{cases} D_t = -2p_t + 10 & \text{—①} \\ S_t = 2p_t^e + 2 & \text{—②} \\ D_t = S_t & \text{—③} \\ p_t^e = p_{t-1} & \text{—④} \end{cases}$$

← (iii)のケース

①②④を③へ代入

$$-2p_t + 10 = 2p_{t-1} + 2$$

$$p_t = -p_{t-1} + 4 \quad \text{—(*)}$$

$p_t = p_{t-1} = \bar{p}$ より $\bar{p} = 2$

(*)より $p_t - 2 = -(p_{t-1} - 2)$

$$= (-1)^t (p_0 - 2)$$

$$\therefore \underline{p_t = (-1)^t (p_0 - 2) + 2}$$

数量の動学（動き）は、①より

$$X_t = D_t \ (= S_t)$$

$$= -2\left[(-1)^t(P_0-2)+2\right]+10$$

$$\therefore X_t = -2\cdot(-1)^t(P_0-2)+6$$

例えば $P_0=3$ のとき、$P_0-2=1$ なので

$$P_t = (-1)^t + 2$$

$$X_t = -2\cdot(-1)^t + 6$$

である。よって、具体的には、

$$\{P_t\} = \{1, 3, 1, 3, 1, 3, \cdots\}$$

これは P_1.
($P_0=3$)

$$\{X_t\} = \{8, 4, 8, 4, 8, 4, \cdots\}$$

という数列となる。

問. $P_0 = \frac{3}{2}$ のとき 価格と数量の動学はどうなるか？

答. $P_t = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^t + 2$

$$X_t = (-1)^t + 6$$

よって $\{P_t\} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right\}$

$$\{X_t\} = \{5, 7, 5, 7, \cdots\}$$