3. 最適化（後半）

3.2 消費者：効用最大化と需要曲線の導出

消費者：様々な財やサービスを購入する。

何のために？

それらの財を利用(消費)して生活する。

満足感を得る。

消費量 ⟶ 満足度(効用)

この関係を表すのが効用関数

utility function

ただし、いくらでも財を購入できるわけではない。

予算の範囲内で。

制約条件付最適化問題

消費者の効用最大化問題

$$\max_{x,m} \; u(x) + m$$
$$\text{s.t.} \; px + m \leq M$$

max 最大化せよ

subject to

～の制約の下で

xとmを選択する

x 財の消費量

$u(x)$ それに対して消費者が感じる満足感の貨幣価値

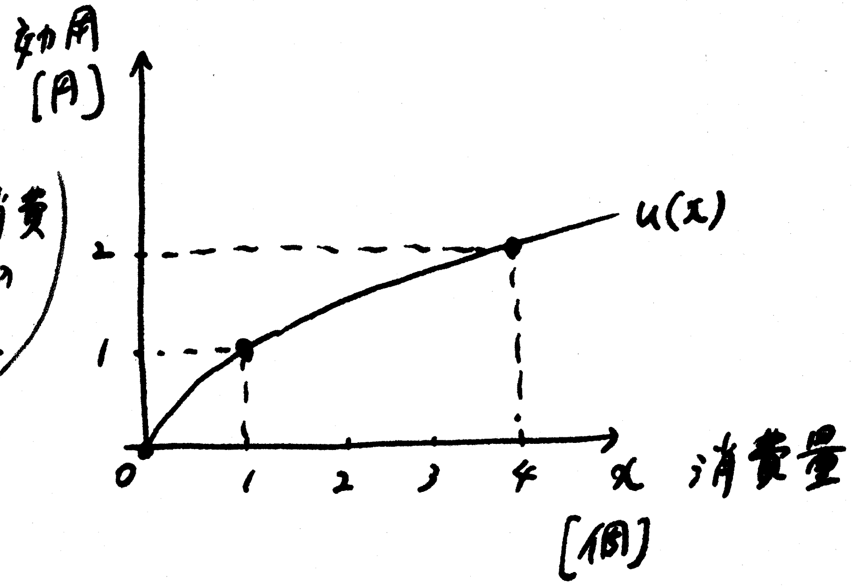
m 貨幣保有量

M 所得

pとMは外生変数

効用関数について

例えば $u(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ の場合



(財を4単位消費すると2円分の満足感を得る。)

※一般には、効用の値は貨幣単位で測られる必要はない。

その微係数

$$u'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

限界効用
MU marginal utility

これは「消費量をちょっと増やしたとき、追加的にどれだけの(何円分の)効用をえられるか」を表す。

MUの単位は、[円/個]である。

「消費財を1個増やしたとき、効用は○円分増加する」

1個あたり、効用○円分

効用関数 $u(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ の性質

① 単調増加

$$u'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad (>0)$$

消費量↑ ⇒ 効用水準↑

② MU逓減

$x\uparrow \Rightarrow u'(x)\downarrow$

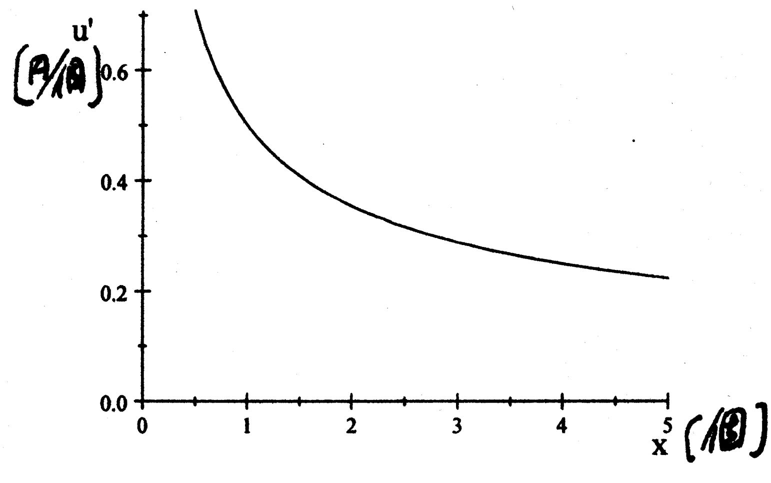
符号自体は正だが、値は減少する。

ビールをのむ場合でいうと、

1杯目 → ものすごく効用が上がる

2杯目 → 1杯目ほどには追加的効用はえられない

⋮



②を2階の微係数を用いて表現すると

$$u''(x)<0$$

($u'(x)$のグラフの傾きが負だから。)

③ $\lim_{x \to 0} u'(x) = \infty$ $\left(u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

xを0にドンドン近付けたとき
MUの値はいくらでも大きくなる

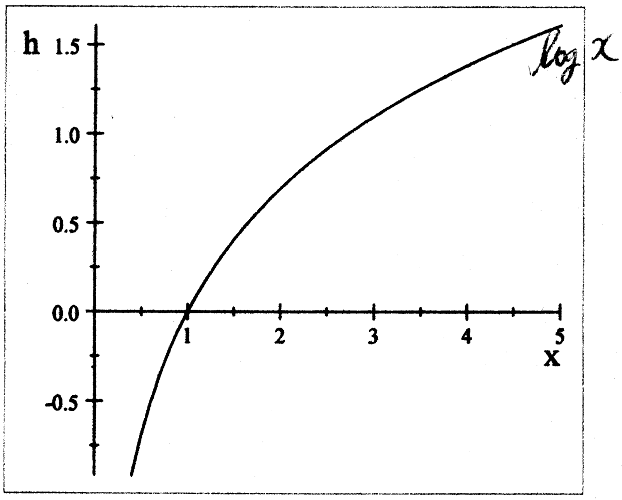
$\lim_{x \to 0}$ (limit（極限）
x→0のときの)

消費量が非常に小さい（xが0に近い）とき、
追加的に少し消費すると、非常に大きい
追加的効用（MU）をえられる。

④ $\lim_{x \to \infty} u'(x) = 0$

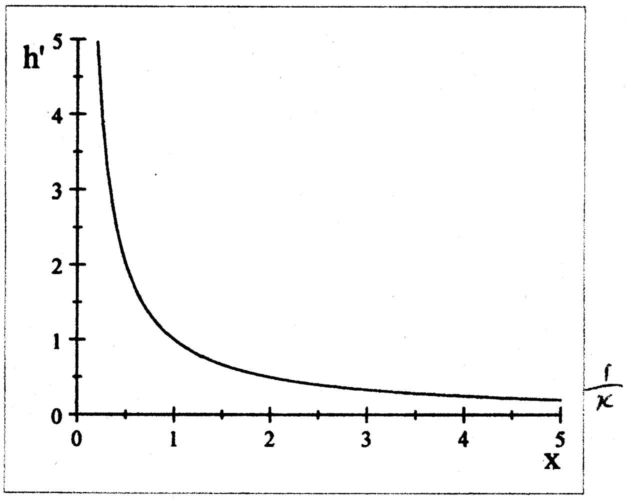
消費量が非常に多い（$x \to \infty$）とき、
ほとんどMUはえられなくなる。

$u(x) = \sqrt{x}$ の他に、
$h(x) = \log x$ なども、①〜④の条件をすべて満たす。(ここで、底は、ネピア数$e = 2.78\cdots$である。)



$h'(x) = \frac{1}{x}$

対数関数の
微分公式
$(\log x)' = \frac{1}{x}$



cf. $\left(\log(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x}$

$\left(\log\left(\frac{1}{2}+x\right)\right)' = \frac{1}{\frac{1}{2}+x} = \frac{2}{2x+1}$

制約条件付最適化問題に戻る.

$$\boxed{\begin{aligned} &\max_{x,m}\ u(x)+m \\ &\text{s.t.}\ px+m \leqq M \end{aligned}}$$

(1) 目的関数
(2) 制約条件

- (2)は常に等号で満たされる
  (予算を余らせるのはムダだから)

- よって. $m = M - px$

- これを(1)へ代入

$$\boxed{\max_{x}\ u(x)+M-px}$$

M, pはここでは定数扱い.

- 微分してゼロの条件(一階の条件)より

$$\boxed{u'(x) = p}$$

を得る.

(一階の条件
First Order Condition
FOC)

この式の意味は?

左辺: 消費量を微小な1単位余分にふやすことによる
消費者の追加的満足感の増分(の貨幣価値).
限界効用. 限界支払い意思額。(これだけなら支払う意思がある.)

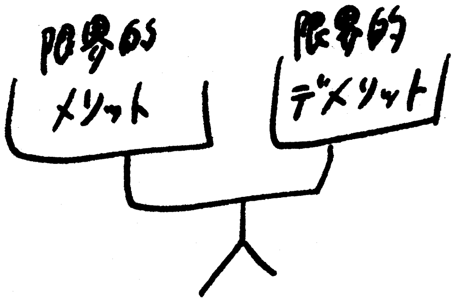
右辺: 財を1単位購入することのコスト

合理的な行動の原則

限界的なメリット（ベネフィット, benefit）と

〃 デメリット（コスト）を比較して

意思決定（decision making）を行う。



⇒ 意思決定

消費者の効用最大化問題では，

限界的メリット = MU （本講義では貨幣単位）

〃 デメリット = 価格

MU > P ならば，もう少し購入量を増やせばよい。

MU < P ならば 〃 〃 へらせばよい。

最適購入量では，MU = P となっているはず。

例. $u(x) = \sqrt{x}$ の場合

$$\boxed{\begin{aligned} &\max \quad x^{\frac{1}{2}} + m \\ &\text{s.t.} \quad px + m \leq M \end{aligned}}$$

$$\Big\downarrow \; m = M - px$$

$$\boxed{\max_{x} \quad x^{\frac{1}{2}} + M - px}$$

$$\Big\downarrow$$

FOC $\quad \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = p \qquad$ ($u'(x) = p$ の条件)

$$\frac{1}{4x} = p^2$$

$$\therefore x^* = \frac{1}{4p^2}$$

これが、この消費者の需要関数

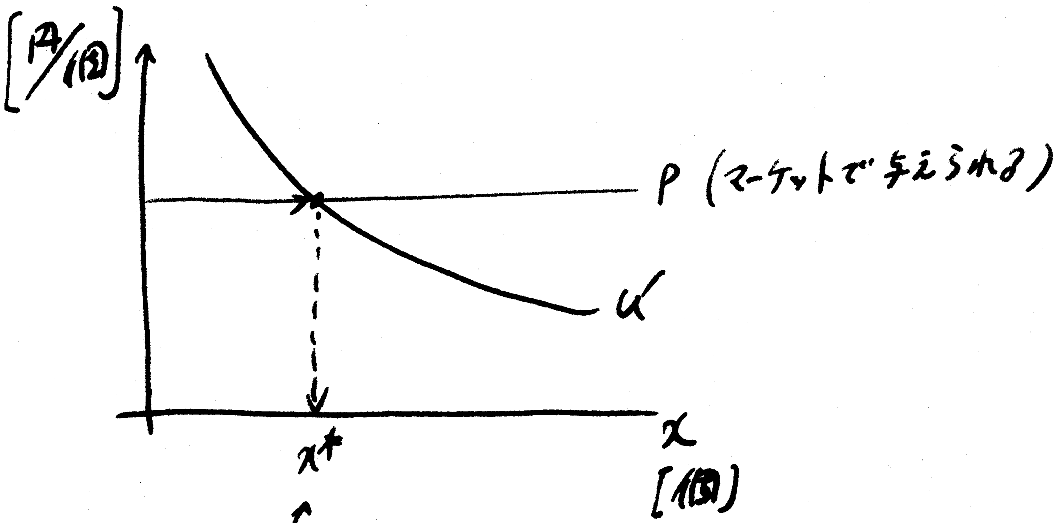
価格↑ ⇒ 需要量↓ となっている!

$p = 1 \Rightarrow x^* = \frac{1}{4}$

$p = 2 \Rightarrow x^* = \frac{1}{16}$

$\vdots$

図による説明



$u'(x^*)=P$ をみたす
消費量

この意味で、(この場合)

MU曲線 = 需要曲線

である。

例

$u(x) = 2\sqrt{x}$ の場合

先ほどより、1単位あたりの（この財の）消費から多くの（貨幣で測った）効用を得る。

（この消費者は、さっきの消費者よりも、相対的にこの財が好き。）

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\limits_{p,m} \ 2\sqrt{x} + m \\ \quad \text{s.t. } px + m \leqq M \end{array}}$$

$$\Big\downarrow \ m = M - px$$

$$\boxed{\max_{x} \ 2\sqrt{x} + M - px}$$

$$\Big\downarrow$$

FOC

$$x^{-\frac{1}{2}} = p$$

$$\therefore x^* = \frac{1}{p^2}$$

$p = 1 \Rightarrow x^* = 1$

$p = 2 \Rightarrow x^* = \frac{1}{4}$

$\vdots$

同じ価格に対して、さっきの消費者よりこの財をたくさん消費する。

③ $\lim_{x\to 0} u'(x) = \infty$ が満たされないケース

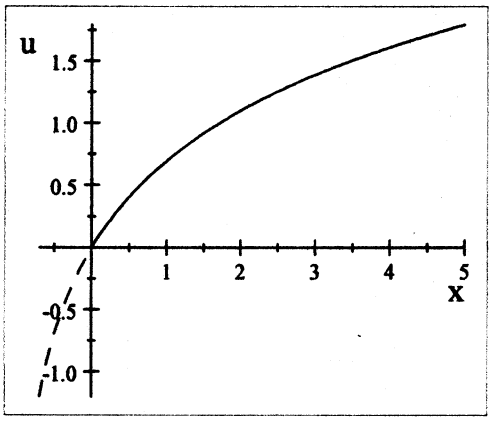
例. $u(x) = \log(1+x)$ $(x>0)$

このとき, $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ なので

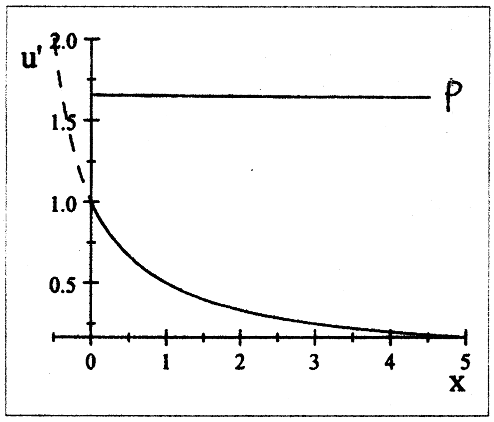
$u'(0)=1$

$x>0$ のときは, $u'(x) < 1$.

$u(x) = \log(1 + x)$



$u'(x) = \frac{1}{1+x}$



$p>1$ のときは, $x>0$ の範囲で

$MU < P$

なので消費量をゼロにするのが最適。

実際に需要関数を求める。

$$\boxed{\begin{array}{l} \max_{x,m} \log(1+x)+m \\ \quad s.t.\ px+m \leqq M \end{array}}$$

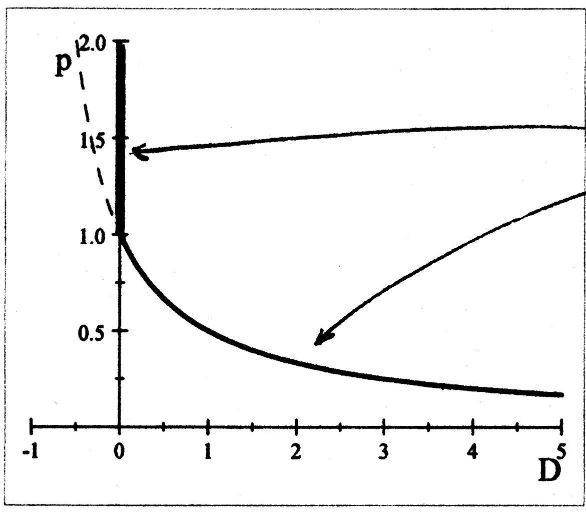
$$\downarrow$$

$$\boxed{\max_{x} \log(1+x)+M-px}$$

$$\downarrow$$

<u>FOC</u> $\quad \dfrac{1}{1+x}=p \qquad \therefore\ x^*=\dfrac{1}{p}-1$

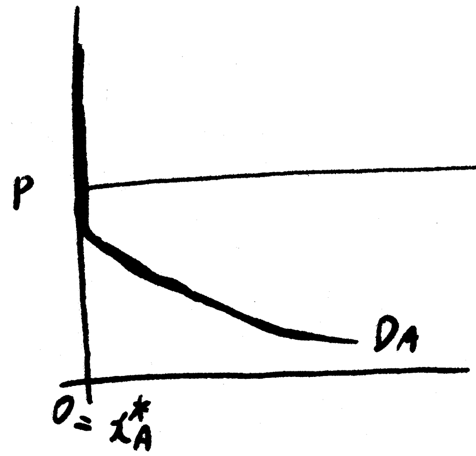
結局, $D(p)=\begin{cases} \dfrac{1}{p}-1 & (p\leqq 1) \\ 0 & (p\geqq 1) \end{cases}$ となる。



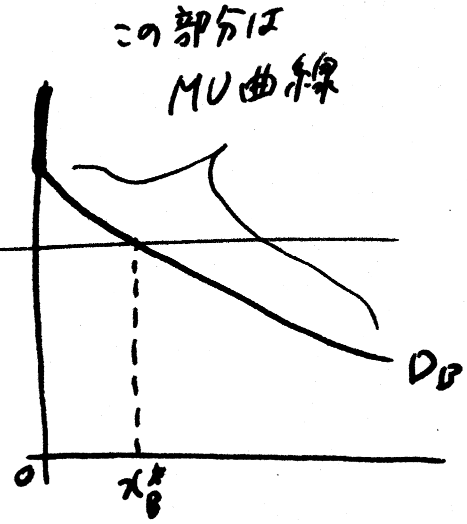
需要曲線

(この場合は, MU曲線の一部 + タテ軸 となっている。)

海外旅行



Aさんの需要曲線



Bさんの需要曲線

（さほど海外旅行は
好きではない。
今の価格では、全く
海外旅行にいかない。）

（比較的、海外旅行好き。
x_B^*だけ需要する。）

2人の好みの違いを反映している。

コア・ミクロA　第3章(後半)

練習問題

1. 効用関数が $u(x) = \log x$ のとき、この消費者の需要関数を導出し、価格に関して減少関数となっている(つまり、価格が上昇すれば、最適な需要量は減少する)ことを確認せよ。ただし、所得は十分大きいとする。(ヒント:$(\log x)' = 1/x$ である。)

2. 効用関数が $u(x) = 2\log x$ とする。消費者の所得は十分大きいとする。
(1)実際に需要関数を導出する前に、以下の点について考えてみよ。問題1の場合を比較して、同じ価格に対してこの消費者の最適な需要量は、多いだろうか、少ないだろうか。根拠とともに答えなさい。
(2)需要関数を導出し、(1)での予想が正しかったか確認せよ。

3. アイスクリームについて、ある消費者の効用関数は、$u(x) = 200x^{\frac{1}{2}}$ とする。ここで、xは、この消費者のアイスクリーム消費量とする。また、この消費者は、所得は十分保有しているとする。アイスクリームの価格が100円なら、この消費者はいくつのアイスクリームを購入するか。

4. 効用関数が $u(x) = \log(\frac{1}{10} + x)$ のとき、この消費者の需要関数を導出せよ。ただし、消費者の所得は十分大きいとする。
※参考までに効用関数のグラフを描くと、下図の通り。